Nombres complexes

(a) On a $u_0 - v = Ri$, donc $v + RCv' = u_0$, soit $v' = \frac{-1}{RC}v + \frac{u_0}{RC}$.

(b) Si u_0 est une constante U_0, on trouve U_0 comme solution particulière de l'équation, et $Ke^{-\frac{t}{RC}}$ pour solution de l'équation sans second membre associée.
Donc finalement, $v(t) = Ke^{-\frac{t}{RC}} + U_0$.

(c) La dérivée de $\underline{v}(t)$ est $Bj\omega e^{j(\omega t+\varphi)} = j\omega\underline{v}(t)$. Si on remplace dans l'équation trouvée [pré]cedemment, et que l'on simplifie tout par $e^{j\omega t}$, on trouve : $Bj\omega e^{j\varphi} = \frac{-1}{RC}Be^{j\varphi} + \frac{A}{RC}$, d[']

$$Be^{j\varphi} = \frac{A/RC}{\frac{1}{RC} + j\omega} = \frac{A}{1+(\omega RC)^2}(1 - j\omega RC).$$

(d) Ainsi, φ est l'argument du nombre $1 - j\omega RC$. Si $\omega RC = 3$, c'est l'argument de $1 - 3j = \sqrt{10}(\frac{1}{\sqrt{10}} - \frac{3}{\sqrt{10}}j)$, soit $-\arccos(\frac{1}{\sqrt{10}})$.

Développements limités

On place en $A(-a, 0)$ une charge $-q$, et en $B(a, 0)$ une charge q. Déterminer le potentiel électrique $V(M)$ en un point M situé loin du dipôle, en fonction de ses coordonnées polaires r et θ.

corrigé succinct : on détermine $AM = r\sqrt{1 + 2a/r\cos\theta + a^2/r^2}$, $BM = r\sqrt{1 - 2a/r\cos\theta + a^2/r^2}$, donc

$$V(M) = \frac{-q}{4\pi\epsilon_0 r}\frac{1}{\sqrt{1 + 2a/r\cos\theta + a^2/r^2}} + \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r}\frac{1}{\sqrt{1 - 2a/r\cos\theta + a^2/r^2}}.$$

Si $r >> a$, $2r/a\cos\theta - a^2/r^2 \simeq 2r/a\cos\theta$ et $-2r/a\cos\theta - a^2/r^2 \simeq -2r/a\cos\theta$ sont petits, donc avec l'approximation $\frac{1}{\sqrt{1-x}} = 1 + x/2$ on en déduit $V(M) = \frac{qa\cos\theta}{2\pi\epsilon_0 r^2}$

Comparaison de températures

1) Ville de Pekin :

L'étendue des températures de la ville de Pekin vaut Max-min=31-(-5)=36°

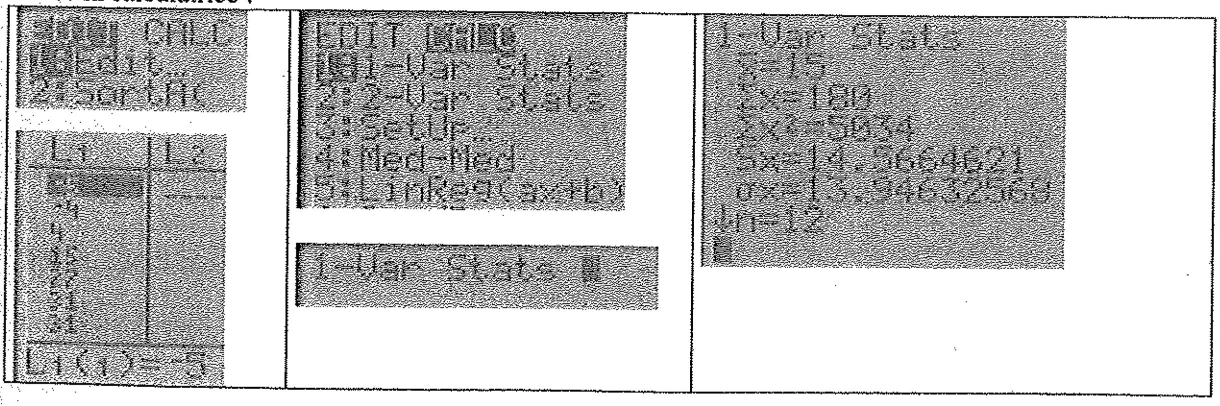
La moyenne des températures de la ville de Pekin est égale à :

$$\overline{x}_1 = \frac{-5-4+4+15+27+31+31+30+26+20+10-5}{12} = \frac{180}{12} = 15$$

La variance des températures vaut donc $V_1 = \frac{(-5-15)^2 + (-4-15)^2 + ... + (10-15)^2 + (-5-15)^2}{12} = \frac{2334}{12} = 194,5$

L'écart-type des températures vaut donc $\sigma_1 = \sqrt{V_1} = \sqrt{194,5} \approx 13,95$

Avec la calculatrice :



2) Ville de Paris

L'étendue des températures de la ville de Paris vaut Max-min=19-(3)=16°

La moyenne des températures de la ville de Paris est égale à :

$$\overline{x}_2 = \frac{3+4+7+10+14+17+19+18+16+17+7+6}{12} = \frac{138}{12} = 11,5$$

La variance des températures vaut donc $V_2 = \frac{(3-11,5)^2 + (4-11,5)^2 + ... + (7-11,5)^2 + (6-11,5)^2}{12} = \frac{387}{12} = 32,25$

L'écart-type des températures vaut donc $\sigma_2 = \sqrt{V_2} = \sqrt{32,25} \approx 5,68$

2) Les calculs précédents permettent d'établir quelques remarques :

En moyenne il fait plus chaud à Pekin qu'à Paris

L'étendue des températures est plus forte à Pekin qu'à Paris

Le climat est plus « modéré » à Paris qu'à Pekin car les températures sont moins « étirées » autour de la moyenne